Instituto Nuevo Siglo
General Roca – Río Negro
5° Año

DESAFÍO MARTE

<u>ETAPA 3</u>: DISEÑIO DE LA MISIÓN

1. NOTAS

- La energía es más eficiente mediante la teoría de transferencia de Hohman (ver gráfico A)

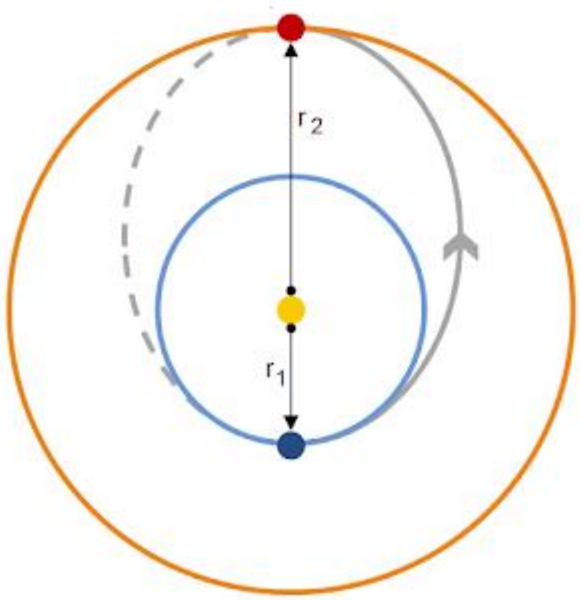


Gráfico A: La circunferencia naranja de radio r2 es la de Marte, la celeste de radio r1 la de la Tierra. La punteada gris en la de Hohman.

- Perigeo/Perihelio: Punto más cercano al sol
- Apogeo/Afelio: Punto más lejano del sol
- AU: Astronomica Units (Unidades Astronómicas)
- Lanzar la nave en perigeo (respecto a la Tierra) y llega en apogeo a Marte (punto más alejado del sol)
- Leyes a tener en cuenta:
  - 2da Ley de Kepler: Ley de áreas iguales donde el momento angular es constante igual que la velocidad aerolar: $a^2 = b^2 + c$
  - 3era ley de Kepler: El cuadrado de T (Periodo) es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita: $t = \sqrt[2\pi]{\frac{r^3}{GMe}}$
- Distancias:
  - Del sol a Marte$= 2{,}0662 \cdot 10^8 km$
  - Del sol a la tierra$= 1{,}471 \cdot 10^8 km$
  - Coordenadas de Perigeo, Marte: $(-126{,}169{,}776{,}453\ m, 163{,}625{,}969{,}530 m)$
  - Coordenadas de Perigeo, Tierra: $(0m, -147{,}098{,}074{,}000m)$
  - Perigeo y su velocidad según Marte: $26{,}499 \frac{m}{s}\ o\ 26{,}500 \frac{m}{s}$

- Perigeo y su velocidad según Tierra: $30{,}286\frac{m}{s}$

Masas	En kg	Periodo en años (T)	Radios
Sol	$1{,}989 \cdot 10^{30} kg$	-	$6{,}6 \cdot 10^{5}\ km$
Tierra	$5{,}965 \cdot 10^{24} kg$	$1{,}523691\ AU\ o\ 1{,}8808\ años$	$6378\ km$
Marte	$6{,}4219 \cdot 10^{23} kg$	$1\ AU\ o\ 1\ año$	$3397 km$

Dato: velocidad de escape es $\sqrt{2}$ mayor (40% de aproximación que la velocidad orbital)

Se necesita una velocidad adicional además de la velocidad Inicial o V0.

Para saber que Marte se encuentre en posición (ventana de lanzamiento) con respecto a la tierra se necesita saber la duración de vuelo desde los puntos de P a A por medio de la 3era ley de Kepler: $\frac{t^2}{a^3}$=Constante

Reemplazo con respecto a la Tierra para calcular la posición:

$$T = 1\ año$$

$$1UA\ se\ le\ asigna\ 2a\ para: eje\ mayor\ y\ 1UA\ se\ le\ asigna\ a\ para: semieje$$

$$r_{1(tierra)} + r_{2(marte)} =$$

$$1 + 1{,}523691 = 2{,}523691\ Au$$

Eje mayor de eclipse orbital $(2a)$ y su mitad de su longitud es el semieje con símbolo a

$$\frac{2{,}523691}{2} = a\ (1{,}261845)$$

$$t^2 = a^3$$

$$t^2 = (1{,}261845^3)$$

$$t = \sqrt{2{,}00918}$$

$$t = 1{,}417454\ años\ de\ ida\ y\ vuelta\ desde\ los\ puntos\ P\ a\ A\ y\ de\ regreso\ a\ P.$$

$$Se\ divide\ el\ resultado\ por\ 2\ para\ lograr\ obtener\ el\ tiempo\ de\ tránsito\ de\ ida\ a\ Marte:$$

$$\frac{1{,}417454}{2} = 0{,}70873\ años$$

Entonces por regla de 3 simple se definen meses y días:

1,88 años terrestres de Marte → 22,9 meses

0,70873 años terrestres de Marte → 8,6 meses

1,88 años terrestres de Marte → 687 días

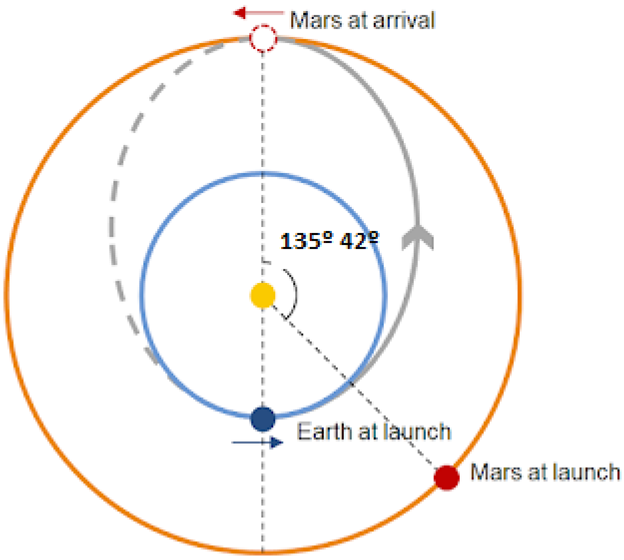
0,70873 años terrestres de Marte → 259 días

Locación de Marte: ¿Dónde debería estar Marte durante el lanzamiento?

1,88 años en hacer una vuelta de 360 grados, se asume que la órbita es circular, entonces:

1,88 años → 360º

0,70873 años → 135º 42º



2. **FECHA DE DESPEGUE**

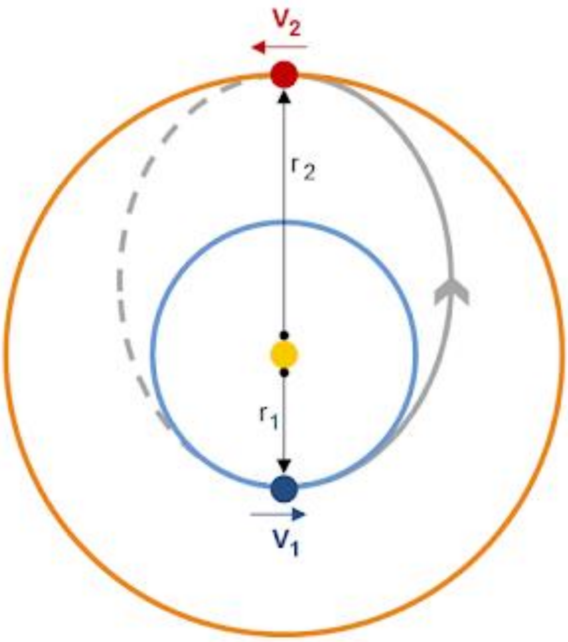
Para responder la fecha de despegue se tiene en cuenta la ventana de lanzamiento que dura 26 meses, la próxima fecha disponible es: 16 de septiembre de 2024 llega la nave en Perifelio de Tierra. Se calcula la velocidad de la nave desde el punto P en Tierra hacia la órbita de transferencia y el cambio de velocidad en el punto A para igualar la velocidad con Marte en su órbita.

La convergencia con Marte debe ser a 44º 17º por delante de la órbita terrestre y a 135º 42º del punto de convergencia con la nave.

Ya calculada la posición, es hora de calcular la velocidad.

Velocidades que se identifican en el cálculo:

- V1: Velocidad necesaria para el lanzamiento desde la Tierra para entrar a la órbita correcta de Hohman (Distancia = r1 desde el sol)
- V2: Nave alcanza la órbita de Marte (Distancia = r2)
- V3: Velocidad a Marte en su órbita con magnitud asumida de forma constante (Órbita d Marte circular)



A tener en cuenta: V2>V3 la nave sobrepasa a Marte

V2<V3 Marte alcanza a la nave

Notación de velocidad de escape:

- Vectores: Solo magnitud
- R1: 1Au (Desde Tierra a Sol)
- R2: 1,523691 AU (Marte)
- v: Velocidad de la órbita alrededor de la Tierra
- v0: Velocidad de la Tierra alrededor del Sol =30Km/s
- v0 para un satélite rodeando la Tierra sobre su superficie =8km/s
- Velocidad en km/s
- Ve de una órbita tan baja se obtiene:

$$vo \cdot \sqrt{2} \cong 1{,}414$$
$$1{,}414 \cdot 8 = 11{,}312\frac{km}{s}$$

No está libre de moverse por el espacio porque si bien se liberó de la gravedad terrestre no está exenta de la atracción del sol del cual continúa moviendo en una órbita similar a la terrestre a v0=30km/s

Segunda velocidad de escape para que la nave aumente su velocidad o potencia para librarse de la órbita circular de atracción del sol

$$Ve = 1{,}414 \cdot 30\frac{Km}{s} = 42{,}42\frac{km}{s}$$

Para alcanzar Ve desde v0 es necesario aumentar 12,42 km/s ($42{,}42\frac{km}{s} - 30\frac{Km}{s}$) más de lo necesario para librarse de la gravedad terrestre desde su superficie.

Ecuaciones requeridas:

- 1era ley de Kepler: “Los planetas se mueven en elipses con el sol en un foco”
  Fórmula: $\frac{a}{r} = 1 + \cos \emptyset$
- 2da ley de Kepler: “La línea que conecta un planeta con el sol barre áreas iguales en tiempos iguales”
  Fórmula: Velocidad aerolar: $\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{l}{2m}$ se forma el momento angular (GRAFICO)

Referencias:

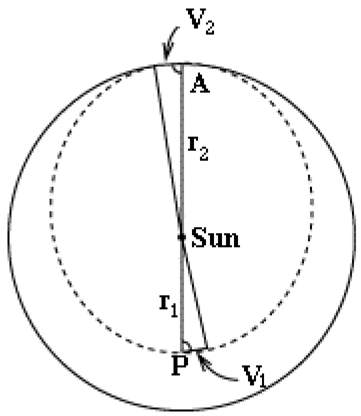
Circunferencia continua: órbita de Marte

Circunferencia discontinua: Elipse de transferencia

Radios: r1 y r2

Aplicación de la 2da ley de Kepler: vel: v1 y v2 (Velocidades de la nave)

Δ=Líneas discontinuas como base de un ángulo recto en A y P, sucede solamente allí a causa de que la línea del sol es perpendicular a la órbita.



Perigeo: Triángulo formado por:

Altura (H): r1

Longitud de base: v1

Ecuación: $A = \frac{1}{2} \cdot H \cdot base$

$A = \frac{1}{2} \cdot r1 \cdot v1$ al

$un1 = \frac{1}{2} \cdot r1 \cdot v1$barrerse los Δ por segundo sus áreas son iguales según la 2da ley de Kepler: $r1 \cdot v1 = r2 \cdot v2$ $(se\ enumera\ la\ ecuación\ para\ ordenar: 1)$

Apogeo: Triángulo formado por:

Ecuación: $A = \frac{1}{2} \cdot r2.v2$→$un2 = \frac{1}{2} \cdot r2.v2$

Ecuación de energía: Energía de un satélite que orbita la tierra en cualquier punto de su órbita es

$$E = \frac{1}{2} m.v^2 (Velocidad\ del\ satélite\ en\ ese\ punto) -$$

$$\frac{km}{r} (Constante\ en\ relación\ a\ la\ gravedad)$$

$$Distancia\ desde\ el\ centro\ de\ la\ tierra\ (2)$$

Para expresar la constante (K) se basa en la velocidad de escape

$$Ve \cong 1{,}414$$

$$V0 = 42{,}42 \frac{km}{2}$$

$$Ve^2 = 2V0^2$$

$$E0\ (velocidad\ de\ escape\ que\ disminuye\ casi\ a\ 0\ a\ causa\ del\ tiempo\ y$$

$$de\ la\ lejanía\ de\ la\ Tierra\ y\ se\ iguala\ a\ mabos\ lados\ a\ 0)$$
$$\rightarrow Energía\ de\ tal\ objeto$$

$$E0 = m \cdot V0^2 - \frac{km}{r1}$$

$$E0 = 0$$

$$\frac{m \cdot V0^2 - \frac{Km}{r1}}{m} = 0$$

$$V0^2 - \frac{K}{r1} = 0$$

$$K = V0^2 \cdot r1\ (ecuación\ 3)$$

Cálculos:

r1: 149 598 000 km

V0= 30 km/s

La órbita alrededor del sol con un radio tiene de longitud: $2\pi_{r1} = 938\ 952\ 000 km$

Si un año vale 365 días los cuales valen 86400 horas que contienen 3153600 segundos entonces la V0 será:$\frac{938\ 952\ 000}{3\ 153\ 600}\ ya\ que\ debe\ ser\ en \frac{Km}{s}$

$$V0 = 29{,}773 \frac{km}{s}\ en\ vez\ de\ 30 \frac{Km}{s}$$

$$V0^2 = 886.43 \frac{Km}{s}$$

Despeje de ecuación Nº 3:

$$K = V0^2 \cdot r1$$

$$K = \left(29{,}773\frac{km}{2}\right)^2 \cdot 149\ 598\ 000\ km$$

$$K = 1{,}32608 \cdot 10^{11}$$

$$K = 1{,}32818 \cdot 10^{11}$$

De vuelta a la nave y su viaje: Su energía tiene que ser igual que el Perigeo (P) y Apogeo (A): Se realiza una

$$\frac{\frac{1}{2}m \cdot V1^2}{m} - \frac{\frac{Km}{r1}}{m} = \frac{\frac{1}{2}m \cdot V2^2}{m} - \frac{\frac{Km}{r2}}{m}$$

Se multiplica por 2:

$$V1^2 - \frac{2K}{r1} = V2^2 - \frac{2K}{r2}$$

Sustituye por la ecuación número 3 a la derecha de la misma:

$$V1^2 - V2^2 = 2V0^2 \cdot r1(\frac{1}{r1} - \frac{1}{r2})$$

$$V1^2 - V2^2 = 2V0^2 \cdot \left(1 - \frac{r1}{r2}\right) Ecuación\ número\ 4$$

Unidades astronómicas:

r1: 1 año

r2: 1,88 años o 1,523692 Ua →$\frac{r1}{r2} =$

$$\frac{1}{1{,}523691} = 0{,}656301$$

$$1 - \frac{r1}{r2} = 0{,}343699$$

Ahora se calcula el lado derecho de la ecuación 4:

$$2V0^2 \cdot (1 - \frac{r1}{r2})$$

$$2 \cdot 886{,}43 \cdot (1 - \frac{r1}{r2})$$

$$177286 \cdot (0{,}343699) = 609.33\ \frac{Km^2}{s}\ \rightarrow 2V0^2$$

Faltan averiguar V1 y V2 usando la ecuación número 1→$r1 \cdot V1 = r2 \cdot V2$, se expresa un término en base al otro: $V2^2 = V1^2 \cdot (\frac{r1^2}{r2^2})$, se sustituye el lado derecho de la ecuación:

$$V1^2 - V2^2 = 2V0^2 \cdot (1 - \frac{r1^2}{r2^2})$$

$$V1^2 - V2^2 = V1^2 \cdot (1 - \frac{r1^2}{r2^2})$$

$$V1^2 - V2^2 = V1^2 \cdot (1 - \frac{1}{2{,}3216})$$

$$V1^2 - V2^2 = V1^2 \cdot 0{,}569269$$

Retomando ecuación 4:

$$V1^2 - V2^2 = 2V0^2 \cdot (1 - \frac{r1}{r2})$$

$$V1^2 \cdot 0{,}569269 = 609.33$$

$$V1^2 = \frac{609.33}{0{,}569269}$$

$$V1^2 = 1070.37$$

$$V1 = \sqrt{1070{,}37}$$

$$V1 = 32{,}716\ km/s$$

Para despejar V2: Velocidad con la cual la nave llega a Marte

$$V2 = V1 \cdot (\frac{r1}{r2})$$

$$V2 = 32{,}716 \cdot 0{,}656301 = 21{,}472\ km/s$$

¿Cómo queda esta V2 comparada con la V3 de Marte en su órbita?

Se usa la 3era Ley de Kepler: Distancia del radio en UA, periodo orbital en años.

Radio de Marte: 1,523691

$$T^2 = r^3$$

$$T^2 = 3{,}53745$$

$$T = \sqrt{3{,}53745}$$

$$T = 1{,}8808\ años\ o\ 1{,}88\ años\ en\ Marte\ que\ equivalen\ a\ 686\ \ días$$

Durante 686 días la nave espacial cubre:

$$2\pi_r = 6378 \cdot 1{,}523691 \cdot 149598000km = 1453{,}8 \cdot 10^6 km\ o\ 1453 \cdot 10^6$$

Se divide por el periodo (T):

$$1453{,}8 \cdot \frac{10^6}{686} = 2{,}119254 \text{ km/día} \rightarrow \frac{2\pi_r}{T}$$

1 día→24hs

686 días → X =16464 hs

24 hs → 3600 seg

16464 hs → 59356800 seg

Como con 24 hs de Marte tiene 86400 segundos (24hs por los segundos de 16464hrs y dividido por dicho número) la órbita del planeta cubierta x segundo es:

$$\frac{2{,}119254}{86400} = 24{,}528\ km$$

La definición de velocidad es distancia por segundo, entonces se cumple que:

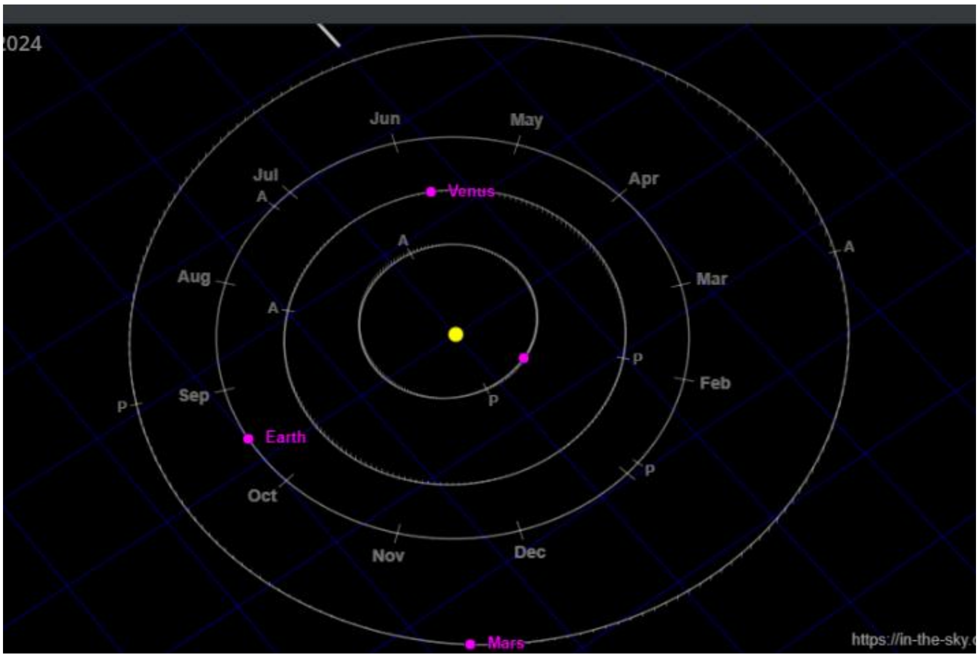
$V3 = 24{,}528\ km/\mathrm{s}$

Comparando con V2 que vale: 21,472 km/s

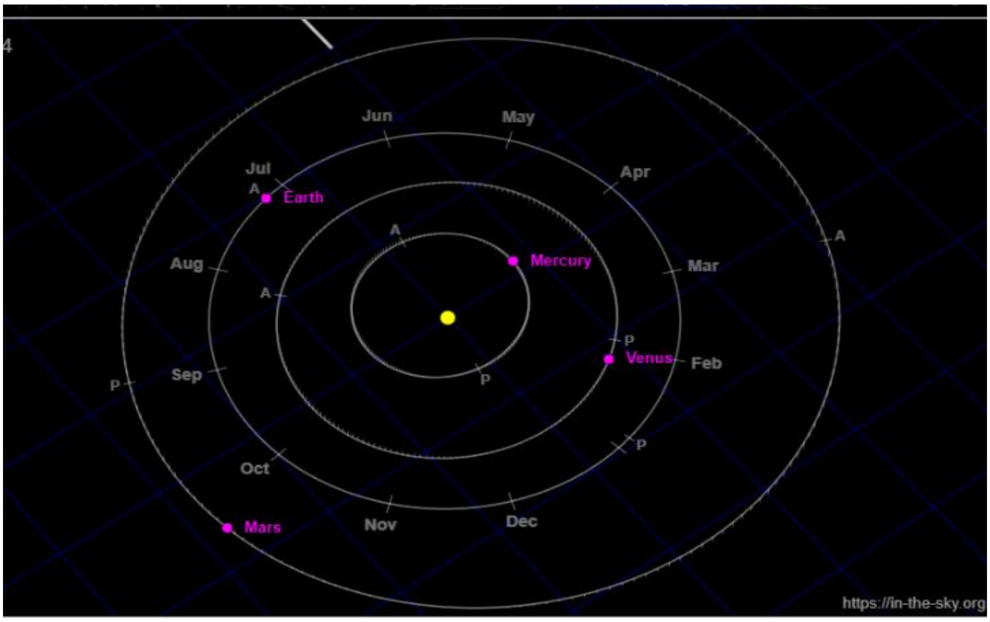
$$V3 - V2 \rightarrow\ 24{,}528\frac{\mathrm{Km}}{\mathrm{s}} - 21{,}472\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = La\ diferencia\ que\ debe\ generar\ la\ nave\ para\ alcanzar\ a\ Marte\ porque\ se\ mueve\ más\ rápido\ (3{,}056\ km)$$

Fecha de lanzamiento por 26 meses:

- 16 de septiembre de 2024: Llega en Perigeo terrestre:



- 5 de julio de 2024: Parte en Afelio terrestre y llega en Perigeo terrestre el 4 de enero de 2025 junto con Marte



Otra forma de calcular V1 y V2:

Constante (K) gravitacional: $6{,}674 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/Kg$

Masa del sol: $1{,}989 \cdot 10^{3} Kg$

$$V1 = \sqrt{GM(\frac{2}{1{,}496 \cdot 10^{11}} - 1/1{,}88 \cdot 10^{11})}$$

$$V1 = \sqrt{1{,}32818 \cdot 10^{11} \cdot (3{,}4753196 \cdot 10^{10})} = 21{,}484\ Km/S$$

$$V2 = \sqrt{GM(\frac{2}{2{,}280 \cdot 10^{11}} - 1/1{,}88 \cdot 10^{11})}$$

$$V2 = \sqrt{1{,}32818 \cdot 10^{11}(80554876 \cdot 10^{6})} = 32{,}743\ Km/S$$

$$VM = \sqrt{GM/2{,}280 \cdot 10^{11}}$$

$$VM = \sqrt{\frac{2{,}553758333 \cdot 10^{13}}{2{,}280 \cdot 10^{11}}} = 24{,}130\ Km/S$$

$$VM - V2 = 24{,}130\frac{Km}{S} - 21{,}484\frac{Km}{S} = 2{,}646\frac{Km}{S}$$

3. **<u>VIAJE DE REGRESO A LA TIERRA: DE P a A</u>**

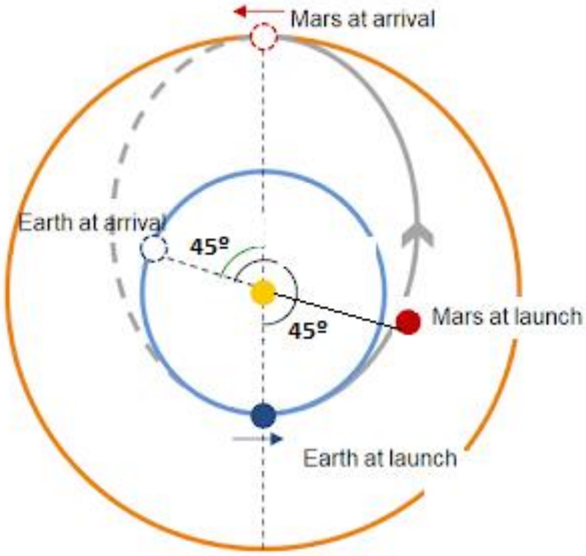
P a A: 0,70873 años o 8,6 meses

12 meses → 360º (1 vuelta completa)

8,6 meses → 258º

Alineación correcta entre la Tierra y Marte para el regreso:

- Durante el viaje de ida la Tierra se adelantó a Marte 45º (180º-135º) ángulo que Marte necesitó para estar por delante de la Tierra.
- Regreso: Hay que esperar a que la Tierra iguale posición inicial a 45º por detrás de Marte, ya que la nave necesita insertarse en la órbita de Hohman
- Cálculo: $1 - \frac{1}{1{,}88} =$ $\acute{o}rbitas\ de\ ventaja\ de\ Tierra\ con\ respeco\ a\ Marte$: 0,531293
- Implica que la Tierra tendrá una órbita completa por delante de Marte como posición positiva cuando:
$$T = \frac{1}{0{,}407} = 2{,}128$$
- Al regresar se necesita a Marte por delante de la Tierra a 45º, donde la Tierra debe viajar por adelantado 360º-(2·45º)=270º
- En tiempo de: $\frac{270º}{360º} \cdot 2{,}13353 = 1{,}6001\ años\ o\ 19{,}2\ meses\ o\ 584\ días$



NOTA:

- Para avanzar en 3600 segundos se necesitan 2,13353 años y para avanzar en el ángulo anterior se necesitan:
- Posición de la Tierra con respecto a Marte en el viaje de regreso
- El viaje de regreso comienza con un empuje negativo de 3,056 Km/S (Se reduce la velocidad orbital de V3 a V2)
- Llega luego de 0,70873 años con V1 al punto 1 y se reduce a V0 de la Tierra (Con empuje negativo de: A (3,056 Km/S) o B (2,646 Km/S))

Posición de la Tierra:

- La Tierra cubre un arco de 135º 55º en su órbita para encontrarse con el punto 1 cuando la órbita terrestre logre alcanzarlo, donde a su regreso desde Marte debe estar a 135º 55º detrás del punto 1 en su órbita. Por eso debe estar en el punto 3 (Detrás de la posición de Marte).

Cálculo de diferencias de movimiento o retraso entre los planetas:

- Entre Marte y la Tierra alrededor del Sol:
$$Velocidad\ de\ rotación\ terrestre = 1\ órbita\ por\ año$$
$$Velocidad\ de\ rotación\ de\ Marte = 1\ órbita\ con\ 1{,}88\ años$$
$$\frac{1}{1.88} = 0{,}53129\ órbitas\ por\ año$$
- Por año la Tierra tiene mayor ventaja sobre Marte ya que:
$$1 - 0{,}531293 = 0{,}468607 \cdot 2\ (Años) = 0{,}937414$$
- Donde la Tierra, tendrá después 1 órbita completa con ventaja a Marte: 1/0,468707=T→2,13353 años, nuevamente ocurre el enfrentamiento para que se abra la ventana de lanzamiento ya que:
12 meses → 1 año
26 meses → X (2,16 años)

- Así, la nave al regresar a la Tierra, la estará alcanzando ya que V1>V0
  En caso A: 3,056 Km/S o caso B: 2,646 Km/S
- Luego la nave debe deshacerse de V0 de atracción: 11,312 Km/S pero si entra a la atmósfera de forma correcta el Energía Cinética adicional se disipa en forma de calor.